

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Treći ispit – 27. kolovoza 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru. Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje i geometrijskog pribora.

Zadatak 1 Neka su A i B točke na kružnici k . Tangente na kružnicu k u točkama A i B sijeku se u točki C . Dokažite da se centar upisane kružnice trokuta $\triangle ABC$ nalazi na kružnici k .

Zadatak 2 Neka su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ konveksni četverokuti takvi da stranice \overline{AB} i $\overline{A'B'}$ imaju zajedničko polovište, stranice \overline{BC} i $\overline{B'C'}$ imaju zajedničko polovište, te stranice \overline{CD} i $\overline{C'D'}$ imaju zajedničko polovište. Dokažite da stranice \overline{DA} i $\overline{D'A'}$ imaju zajedničko polovište.

Zadatak 3

a) Neka su \vec{v} i \vec{w} vektori u trodimenzionalnom prostoru takvi da je

$$\vec{v} \times (\vec{v} \times (\vec{v} + \vec{w})) = \vec{w}.$$

Dokažite da je \vec{w} nul-vektor.

b) Nađite primjer vektora \vec{v} i \vec{w} takvih da \vec{w} nije nul-vektor i vrijedi

$$\vec{v} \times (\vec{v} \times (\vec{v} + \vec{w})) = -\vec{w}.$$

Zadatak 4 Zadana je ravnina $\pi \dots x + y + z = 0$ i točke $P = (1, 2, 3)$ i $Q = (2, 4, 6)$.

a) Odredite ortogonalne projekcije od P i Q na ravninu π .

b) Neka su P' i Q' ortogonalne projekcije od P i Q na ravninu π . Odredite površinu četverokuta $PP'Q'Q$.

Zadatak 5 Neka je \mathcal{E} elipsa sa fokusima F i G . Neka je P proizvoljna točka na elipsi \mathcal{E} i t tangenta na elipsu u točki P . Dokažite da nožište okomice iz F na tangentu t leži na kružnici čiji je promjer glavna os elipse i čije je središte jednako središtu elipse.